P.1 El sistema coordenado cartesiano

En este capítulo se estudian parejas de variables y cómo están relacionadas. Por ejemplo, p podría representar el precio de la gasolina y n el número de galones que usted consume en un mes; x podría ser el número de ingredientes en una pizza mediana y y el costo de esa pizza; o h podría ser la altura de un niño de dos años y w el peso. Para describir las relaciones entre pares de variables se utiliza un sistema coordenado bidimensional.

Tabla P.1

Ingredientes x	Costo y
0	\$ 5
1	7
2	9
3	11
4	13

Un sistema coordenado bidimensional Suponga que el costo de una pizza mediana es \$5 más \$2 por ingrediente. La tabla P.1 muestra que x es el número de ingredientes y y es el costo. Para indicar que $x = 3$ y $y = 11$ van juntos, se puede usar el **par ordenado** (3, 11). El par ordenado (2, 9) indica que una pizza con 2 ingredientes cuesta \$9. La **primera coordenada** del par ordenado representa el número de ingredientes y la **segunda coordenada** representa el costo. La asignación para cada una de las coordenadas es arbitraria, pero una vez que se hace se mantiene fija. Por ejemplo, en el contexto actual el par ordenado (11, 3) indica que una pizza de 11 ingredientes cuesta \$3, y no es lo mismo que (3, 11). Ésta es la razón por la que se llaman "pares ordenados".

Observe que los paréntesis se usan para indicar pares ordenados y también para indicar intervalos de números reales. Por ejemplo, (3, 7) podría ser un par ordenado o el intervalo de números reales entre 3 y 7. Sin embargo, el significado de esta notación debe ser siempre claro a partir del análisis.

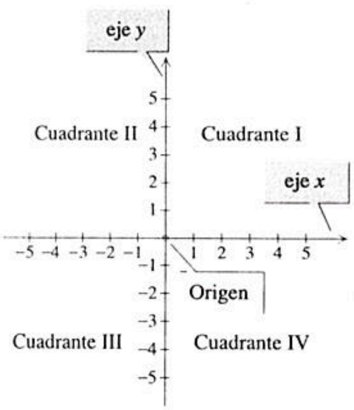


Figura P.1

Los pares ordenados están descritos en un plano en el **sistema coordenado rectangular** o en el **sistema coordenado cartesiano**, llamado así en honor del matemático francés René Descartes (1596-1650). El sistema coordenado cartesiano consiste de dos rectas numeradas dibujadas perpendicularmente entre sí, que se intersectan en el cero de cada recta numerada como se muestra en la figura P.1. El punto en el que se intersectan se llama el **origen**. La recta numerada horizontal es el **eje x** y la recta numerada vertical es el **eje y**. Las dos rectas numeradas dividen el plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**, numerados como se muestra en la figura P.1. Los cuadrantes no incluyen ningún punto sobre los ejes.

Se llama a un plano con un sistema coordenado rectangular, el **plano coordenado** o el **plano xy**. Cada par ordenado de números reales (a, b) corresponde a un punto P en el plano xy. Por esta razón, a los pares ordenados de números se les llama con frecuencia **puntos**. Los números a y b se llaman las **coordenadas** del punto P. Ubicar el punto P que corresponde a (a, b) en el plano xy se llama dibujar o trazar el punto, y P se llama la **gráfica** (a, b).

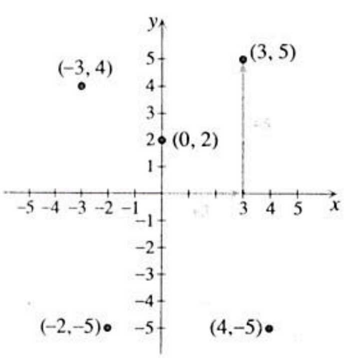


Figura P.2

EJEMPLO 1 Trazo de puntos

Trace los puntos (3, 5), (4, −5), (−3, 4), (−2, −5) y (0, 2) en el plano xy.

Solución El punto (3, 5) está ubicado 3 unidades a la derecha del origen y 5 unidades arriba del eje x como se muestra en la figura P.2. El punto (4, −5) está ubicado 4 unidades a la derecha del origen y 5 unidades debajo del eje x. El punto (−3, 4) está ubicado 3 unidades a la izquierda del origen y 4 unidades arriba del eje x. El punto (−2, −5) está ubicado 2 unidades a la izquierda del origen y 5 unidades debajo del eje x. El punto (0, 2) está sobre el eje y porque su primera coordenada es cero.

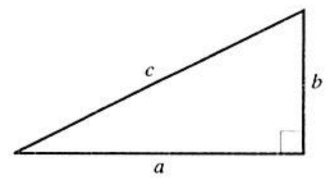
Intente ahora el ejercicio 1.

Observe que para los puntos del primer cuadrante, ambas coordenadas son positivas. En el segundo cuadrante la primera coordenada es negativa y la segunda es positiva, mientras que en el tercer cuadrante, ambas coordenadas son negativas. En el cuarto cuadrante la primera coordenada es positiva y la segunda es negativa.

El teorema de Pitágoras Encontrar la distancia entre dos puntos en el sistema coordenado cartesiano usando el teorema de Pitágoras. Pero antes de hacer esto, se repasará. El teorema de Pitágoras proporciona una relación entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

El teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.



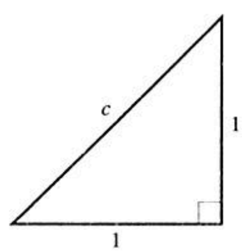
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Si se conocen las longitudes de cualquiera de los dos lados de un triángulo rectángulo, entonces se puede usar el teorema de Pitágoras para determinar la longitud del tercer lado.

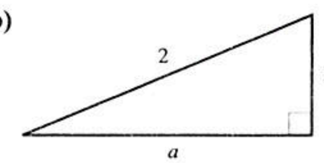
EJEMPLO 2 Aplicación el teorema de Pitágoras

Encuentre el lado desconocido de cada triángulo.

(a)



(b)



Solución

(a) Las longitudes de cada uno de los catetos son iguales a 1 y no se conoce la hipotenusa. Utilizar $c^2 = a^2 + b^2$ con $a = 1$ y $b = 1$:

$$c^2 = 1^2 + 1^2$$
$$c^2 = 2^2$$
$$c^2 = \pm\sqrt{2}$$

Ya que la longitud de la hipotenusa es positiva, $c = \sqrt{2}$.

(b) La hipotenusa es 2, un cateto es 1, y no se conoce el otro cateto. Utilizar $a^2 + b^2 = c^2$ con $c = 2$ y $b = 1$:

$$a^2 + 1^2 = 2^2$$
$$a^2 = 3$$
$$a = \pm\sqrt{3}$$

ya que la longitud de un cateto de un triángulo es positivo, $a = \sqrt{3}$.

Intente ahora el ejercicio 11.

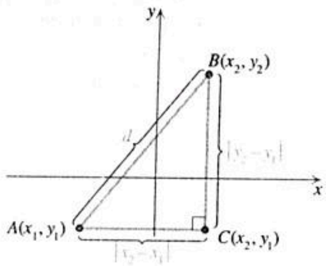


Figura P.3

La fórmula de distancia Considere los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ que se muestran en la figura P.3. Sea que d represente la longitud del segmento de recta $\overline{AB}$. Ahora $\overline{AB}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo en la figura P.3. La distancia entre A y C es $|x_2 - x_1|$ y la distancia entre B y C es $|y_2 - y_1|$. Usando el teorema de Pitágoras se obtiene

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2.$$

Los símbolos de valor absoluto se pueden reemplazar por paréntesis, porque $|a - b|^2 = (a - b)^2$ para cualesquiera números reales a y b. Debido a que la distancia entre dos puntos no es negativa, se tiene la fórmula siguiente.

La fórmula de distancia

La distancia d entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por la fórmula

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

EJEMPLO 3 Aplicación de la fórmula de la distancia

Encuentre la distancia entre $(5, -3)$ y $(-1, -6)$.

Solución Sea $(x_1, y_1) = (5, -3)$ y $(x_2, y_2) = (-1, -6)$. Vea la figura P.4. La distancia es la misma sin importar cuál punto se elija como (x_1, y_1) o (x_2, y_2). Se sustituyen estos valores en la fórmula de distancia:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(-1 - 5)^2 + (-6 - (-3))^2} \\ &= \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = \sqrt{9}\sqrt{5} = 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

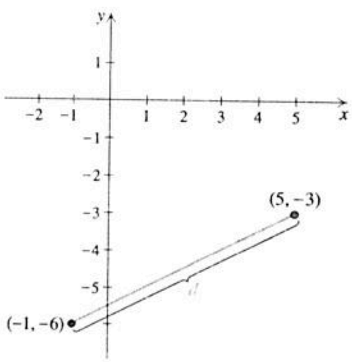


Figure P.4

La distancia exacta entre los puntos es $3\sqrt{5}$. Observe que $\sqrt{36 + 9} \neq \sqrt{36} + \sqrt{9}$, pero $\sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5}$.

Intente ahora el ejercicio 17.

La fórmula del punto medio Cuando usted determina el promedio de dos calificaciones en las pruebas (encontrando su suma y dividiendo entre 2) determina un número a la mitad entre las dos calificaciones. De la misma manera, la mitad del segmento de recta con puntos finales (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se encuentra dividiendo la suma de las coordenadas x entre 2 y la suma de las coordenadas y entre 2. Vea la figura P.5.

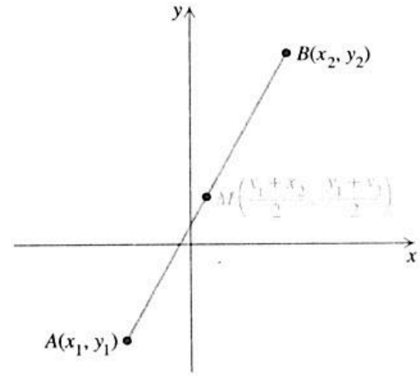


Figura P.5

La fórmula del punto medio

El punto medio del segmento de recta con extremos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

EJEMPLO 4 Aplicación de la fórmula del punto medio

Determine el punto medio del segmento de recta con los extremos dados.

(a) $(1, -3), (5, 4)$ **(b)** $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), (\pi, 0)$

Solución

(a) Para determinar el punto medio sume las coordenadas y divida entre 2:

$$\left(\frac{1 + 5}{2}, \frac{-3 + 4}{2}\right) = \left(3, \frac{1}{2}\right)$$

(b) Para encontrar el punto medio sume las coordenadas y divida entre 2:

$$\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi}{2}, \frac{0 + 0}{2}\right) = \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2}}{2}, 0\right) = \left(\frac{\frac{3\pi}{2}}{2}, 0\right) = \left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$$

Intente ahora el ejercicio 27.

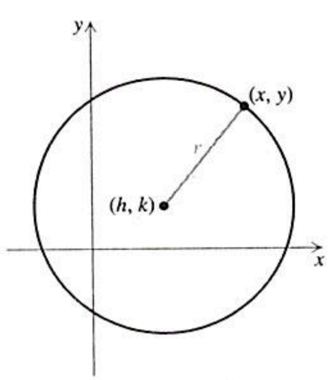


Figura P.6

El círculo Un **círculo** es el conjunto de todos los puntos que están a una distancia fija de un punto dado en el plano. La distancia fija es el **radio** y el punto dado es el **centro**. La fórmula de la distancia se puede usar para escribir una ecuación para un círculo con centro (h, k) y radio r $(r > 0)$. Un punto (x, y) está sobre el círculo que se muestra en la figura P.6 si y sólo si satisface la ecuación

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r.$$

Con el uso de la definición de la raíz cuadrada, se puede escribir la siguiente ecuación:

Teorema: ecuación para un círculo

La ecuación para un círculo con el centro (h, k) y radio r para $r > 0$ es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

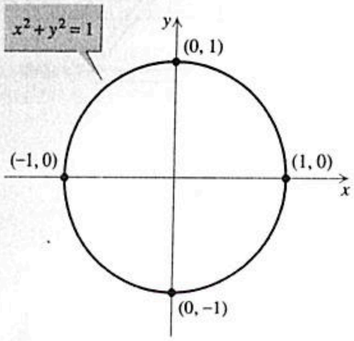


Figura P.7

La formas $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ es la **forma estándar** para la ecuación de un círculo. Si (h, k) es $(0, 0)$, entonces el círculo tiene centro en el origen y su ecuación es de la forma $x^2 + y^2 = r^2$. Si $r = 1$ el círculo se llama **círculo unitario**.

EJEMPLO 5 Trazo de un círculo

Dibuje la gráfica de cada círculo

(a) $x^2 + y^2 = 1$ **(b)** $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$

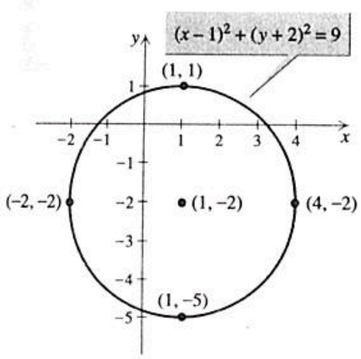


Figura P.8

Solución

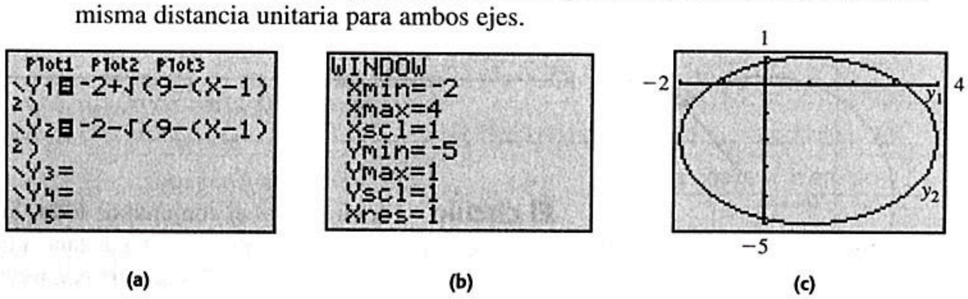
(a) El círculo tiene centro $(0, 0)$ y radio 1. Puede dibujar el círculo como se muestra en la figura P.7 con un compás. Para trazar el círculo a mano ubique los puntos que están a 1 unidad arriba, debajo, a la derecha y a la izquierda del centro como se muestra en la figura P.7, después dibuje el círculo que pase por estos puntos.

(b) Este círculo tiene centro en $(1, -2)$ y radio 3. Dibuje el centro y los puntos que están 3 unidades arriba, debajo, a la izquierda y a la derecha del centro como se muestra en la figura P.8. Después dibuje el círculo que pasa a través de estos puntos.

Para apoyar las conclusiones del inciso **(b)** con una calculadora graficadora primero debe resolver la ecuación para y:

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + (y + 2)^2 &= 9 \\ (y + 2)^2 &= 9 - (x - 1)^2 \\ y + 2 &= \pm\sqrt{9 - (x - 1)^2} \\ y &= -2 \pm \sqrt{9 - (x - 1)^2} \end{aligned}$$

Ahora introduzca y_1 y y_2 como se muestra en la figura P.9(a). Establezca la ventana de visión como se muestra en la figura P.9(b). La gráfica en la figura P.9(c) sustenta las conclusiones previas. Un círculo parecerá redondo sólo si se usa la misma distancia unitaria para ambos ejes.



(a) (b) (c)

Figura P.9

Intente ahora el ejercicio 31.

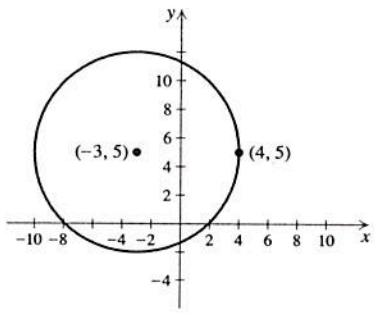


Figura P.10

En el siguiente ejemplo se escribe la ecuación para un círculo a partir de la descripción del círculo.

EJEMPLO 6 Escritura de la ecuación de un círculo

Escriba la ecuación normal para un círculo con centro en $(-3, 5)$ y que pase por el punto $(4, 5)$ como se muestra la figura P.10.

Solución

Ya que la distancia entre el centro $(-3, 5)$ y el punto $(4, 5)$ es de 7 unidades, el radio del círculo es 7. Use $h = -3$, $k = 5$ y $r = 7$ en la ecuación estándar para un círculo:

$$(x - (-3))^2 + (y - 5)^2 = 7^2$$

Por lo que la ecuación del círculo es $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 49$.

Intente ahora el ejercicio 37.

La recta Cualquier círculo en el plano coordenado es el conjunto solución a una ecuación de la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. Asimismo, cualquier línea recta en el plano coordenado es el conjunto solución de una ecuación de otra forma.

> **Definición: ecuación lineal con dos variables (forma normal)**
>
> Una **ecuación lineal** con dos variables x y y es un ecuación de la forma
>
> $$Ax + By = C$$
>
> donde A, B y C son números reales y tanto A como B son diferentes de cero.

La gráfica de cualquier ecuación lineal es una línea recta. Una ecuación lineal se puede escribir en varias diferentes formas. Las ecuaciones

$$x = 5 - y, \qquad y = \frac{1}{2}x - 9, \qquad x = 4 \qquad \text{y} \qquad y = 5$$

son todas ecuaciones lineales ya que se pueden escribir en la forma $Ax + By = C$.

Sólo hay una recta que contiene cualesquiera dos puntos diferentes en el plano xy. Así para trazar una ecuación lineal se necesitan localizar sólo dos puntos que satisfagan la ecuación y se dibuja una recta que pase a través de ellos. Pero ¿cuáles puntos se usan? Ya que todas las rectas se parecen, qué distingue una recta de otra en esta posición. La mejor manera para mostrar la posición es determinar los puntos donde la recta cruza los ejes x y y. Estos puntos son la **intersección con el eje** x y la **intersección con el eje** y.

EJEMPLO 7 Trazo de rectas y muestra de las intersecciones

Grafique cada ecuación. Determine y muestre las intersecciones.

(a) $2x - 3y = 9$ **(b)** $y = 40 - x$

Solución

(a) Puesto que la coordenada y de la intersección con el eje x es 0, se sustituye y igual a 0 en la ecuación

$$2x - 3(0) = 9$$
$$2x = 9$$
$$x = \frac{9}{2}$$

Para encontrar la intersección con el eje y, se sustituye x igual a 0 en la ecuación

$$2(0) - 3y = 9$$
$$-3y = 9$$
$$y = -3$$

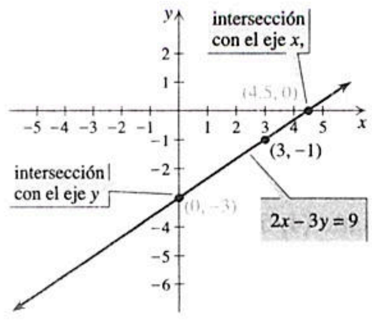


Figura P.11

La intersección con el eje x es (9/2, 0) y la intersección con el eje y es (0, −3). Se ubican dichas intersecciones y se dibuja la recta como se muestra en la figura P.11. Para comprobar, se ubica un punto tal como (3, −1), que también satisfaga la ecuación, y se ve si la recta pasa través de éste.

(b) Si $x = 0$, entonces $y = 40 - 0 = 40$ y la intersección con el eje y es (0, 40). Si $y = 0$, entonces $0 = 40 - x$ o $x = 40$. La intersección con el eje de las x es (40, 0). Dibuje una recta que pase a través de estos puntos como se muestra en la figura P.12. Compruebe que (10, 30) y (20, 20) también satisfacen la ecuación $y = 40 - x$ y que la recta pasa a través de estos puntos.

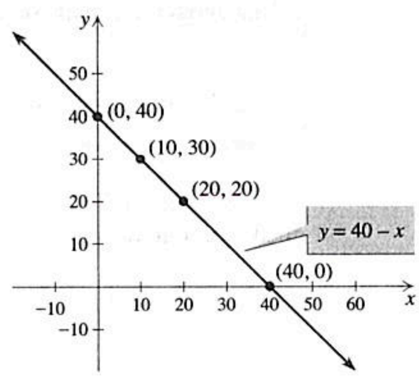


Figura P.12

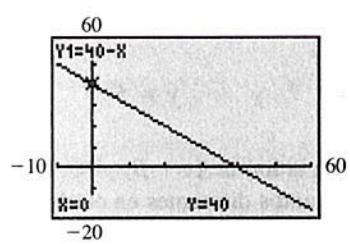


Figura P.13

La calculadora graficadora que se muestra en la figura P.13 es consistente con la gráfica de la figura P.12. Observe que se ha establecido la ventana de visión de manera que muestre las intersecciones.

Intente ahora el ejercicio 53.

EJEMPLO 8 Trazo de rectas horizontales y verticales

Trace cada ecuación en el sistema coordenado rectangular.

(a) $y = 3$ **(b)** $x = 4$

Solución

(a) La ecuación $y = 3$ es equivalente a $0 \cdot x + y = 3$. Ya que x está multiplicado por 0, se puede elegir cualquier valor para x en tanto se elija 3 para y. Por lo que los pares ordenados tales como $(-3, 3)$, $(-2, 3)$ y $(4, 3)$ satisfacen la ecuación $y = 3$. La gráfica de $y = 3$ es la recta horizontal que se muestra en la figura P.14.

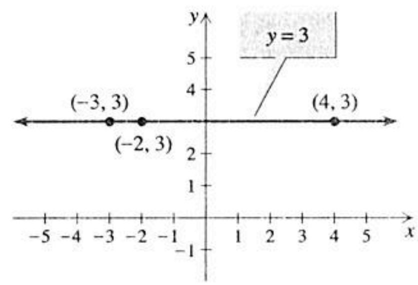


Figura P.14

(b) La ecuación $x = 4$ es equivalente a $x + 0 \cdot y = 4$. Ya que y está multiplicada por 0, se puede elegir cualquier valor para y en tanto se elija 4 para x. Así los pares ordenados $(4, -3)$, $(4, 2)$ y $(4, 5)$ satisfacen la ecuación $x = 4$. La gráfica de $x = 4$ es la recta vertical que se muestra en la figura P.15.

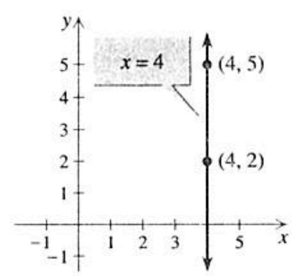


Figura P.15

Intente ahora el ejercicio 65.

PARA PENSAR ¿Falso o verdadero? Explique

1. El punto $(2, -3)$ está en el segundo cuadrante.
2. El punto $(4, 0)$ está en el primer cuadrante.
3. La distancia entre (a, b) y (c, d) es $\sqrt{(a - b)^2 + (c - d)^2}$.
4. La ecuación $3x^2 + y = 5$ es una ecuación lineal.
5. La gráfica de $x = 5$ es una recta vertical.
6. $\sqrt{7^2 + 9^2} = 7 + 9$.
7. El origen está en el punto medio entre $(1, 3)$ y $(-1, -3)$.
8. La distancia entre $(3, -7)$ y $(3, 3)$ es 10.
9. La intersección con el eje x para la gráfica de $3x - 2y = 7$ es $(7/3, 0)$.
10. La gráfica de $x^2 + y^2 = 9$ es un círculo con centro en $(0, 0)$ y radio 9.

P.2 Funciones

En la sección P.1 se estudiaron y se trazaron pares ordenados. En esta sección se continúa estudiando a los conjuntos de pares ordenados, en particular aquellos para los cuales la segunda coordenada se determina mediante la primera.

El concepto de función Si usted gasta \$10 en gasolina, entonces el precio por galón determina el número de galones que obtiene. El número de horas que usted duerme antes de una prueba podría tener influencia en su resultado pero no determina su calificación en la prueba. Si el valor de una variable y se determina por el valor de otra variable x, entonces y **es una función de** x. La frase "es una función de" significa "está determinada por". *Si hay más de un valor para* y *correspondiente a un valor de* x *dado, entonces* y *no está determinada por* x *y* y *no es una función de* x.

EJEMPLO 1 Aplicación del concepto de función

Decida si a es una función de b, si b es una función de a, o ninguna de las dos.

(a) Sea que a represente un entero positivo menor de 100 y b represente el número de divisores de a.

(b) Sea que a represente la edad de los ciudadanos de Estados Unidos y b represente el número de días desde su nacimiento.

(c) Sea que a represente la edad de los ciudadanos de Estados Unidos y b represente su ingreso anual.

(d) Sea que b represente cualquier número real y a represente su cuadrado.

Solución

(a) Se puede determinar el número de divisores de cualquier entero positivo menor de 100. Por lo que b es una función de a. No se puede determinar el entero conociendo el número de divisores, porque diferentes enteros tienen el mismo número de divisores. Por lo que a no es una función de b.

(b) El número de días desde que una persona nació efectivamente determina por lo general, la edad de la persona. Por lo que a es una función de b. Sin embargo, usted no puede determinar el número de días desde que una persona nació a partir de su edad. Necesita más información. Por ejemplo, el número de días desde el nacimiento para dos niños de un año podrían ser de 370 o 380 días. Por lo que b no es una función de a.

(c) No se puede determinar el ingreso a partir de la edad o la edad a partir del ingreso. Se necesitaría más información. Aún pensando que la edad y el ingreso están relacionados, la relación no es lo suficientemente fuerte para decir que una es función de la otra.

(d) Puesto que cada número tiene un cuadrado único, el cuadrado está determinado por el número. Por lo que a es una función de b. No se puede determinar cuál es el número si conoce su cuadrado. Por ejemplo, si se sabe que el cuadrado es 4, entonces el número es 2 o -2. Por lo que b no es una función de a.

Intente ahora el ejercicio 1.

Las funciones que se estudian están comúnmente definidas por fórmulas. Por ejemplo, si y es el cuadrado de x, entonces y es una función de x. Se puede escribir la fórmula o ecuación $y = x^2$ y se dice que $y = x^2$ es una función. Porque y está determinado por x, se dice que y es la **variable dependiente** y x es la **variable independiente**. Cuando se usan las variables x y y, siempre se usa x para la variable independiente y y para la variable dependiente.

Una función proporciona una regla para relacionar valores de la variable independiente con valores de la variable dependiente. La función $y = x^2$ relaciona 3 con 9, 4 con 16, y así sucesivamente. Esta relación se escribe como (3, 9), (4, 16), y así sucesivamente. Por supuesto existe un número infinito de pares ordenados que satisfacen $y = x^2$. Este conjunto de pares ordenados se puede considerar una función.

Función

Una función es un conjunto de pares ordenados en los cuales no hay dos pares que tengan igual la primera coordenada y la segunda coordenada diferente.

Por ejemplo, el conjunto $\{(1, 1), (2, 4), (-2, 4)\}$ es una función porque no hay dos pares que tengan igual la primera coordenada y la segunda coordenada diferente. El conjunto $\{(2,2), (9, 3), (9, -3)\}$ no es una función porque (9, 3) y (9, −3) tienen igual la primera coordenada y tienen diferente la segunda coordenada. Observe que no se permite que se tenga la primera coordenada con dos diferentes segundas coordenadas, porque se quiere que la segunda coordenada esté determinada por la primera.

Una calculadora es una máquina de funciones. Las funciones insertadas en una calculadora están indicadas con símbolos tales como 2 $\overline{x}$, x^2, $x!$, 10^x, e^x, $\ln(x)$, $\text{sen}(x)$, $\cos(x)$, etc. Cuando usted proporciona la primera coordenada y usa una de estas funciones, la calculadora determina la segunda coordenada adecuada. La coordenada y está efectivamente determinada por la coordenada x, ya que la calculadora no produce dos diferentes coordenadas y para una coordenada dada x.

Construcción de funciones Los pares ordenados en una función se pueden especificar mediante una descripción verbal, lista, tabla, fórmula o gráfica. La forma más común y eficiente para especificar los pares ordenados de una función es dar una fórmula que los produzca. Por ejemplo, la función $A = \pi r^2$ determina el área de un círculo cuando se da el radio y la función $y = \sqrt{x}$ determina la raíz cuadrada no negativa de un número no negativo. En el siguiente ejemplo se determina una fórmula para, o se construye, una función.

EJEMPLO 2 Construcción de una función

Dado que un cuadrado tiene diagonales de longitud d y lado de longitud s, escriba el área A como una función de la longitud de la diagonal.

Solución

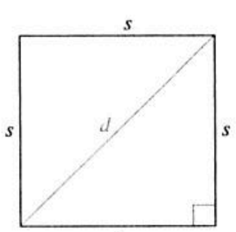


Figura P.16

El área de un cuadrado está dada por $A = s^2$. La diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo como se muestra en la figura P.16. Aplique el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de la figura:

$$s^2 + s^2 = d^2$$

$$2s^2 = d^2$$

$$s^2 = \frac{d^2}{2}$$

Puesto que $A = s^2$ y $s^2 = \frac{d^2}{2}$, se tiene que $A = \frac{d^2}{2}$, que expresa al área de un cuadrado como una función de la longitud de su diagonal.

Intente ahora el ejercicio 15.

Gráficas de funciones La gráfica de una función es una descripción de todos los puntos cuyos pares ordenados conforman la función. Se puede graficar una función calculando bastantes pares ordenados para determinar la forma de la gráfica. Cuando trace funciones, trate de imaginarse la forma que tendrá la gráfica, y después de que la dibuje, deténgase a reflexionar acerca de su forma y del tipo de función que la produce. Si tiene una calculadora graficadora, sírvase de ella para graficar las ecuaciones del siguiente ejemplo. Recuerde que una calculadora graficadora sólo muestra muchos puntos y una gráfica consiste de un número infinito de puntos. Después de que observe lo que se despliega en una calculadora graficadora, aún debe decidir cuál será la forma de la gráfica completa.

El **dominio** de una función es el conjunto de todas las primeras coordenadas de los pares ordenados. El **rango** de una función es el conjunto de todas las segundas coordenadas de los pares ordenados. Si el dominio no está especificado, se supone que serán todos los números reales que se pueden usar en la expresión que define la función. Las segundas coordenadas correspondientes deben también ser números reales.

EJEMPLO 3 Trazo mediante el dibujo de pares ordenados

Trace cada función y establezca el dominio y rango.

(a) $y = x^2$ **(b)** $y = |x| - 40$

Solución

(a) Realice una tabla de los pares ordenados que satisfacen $y = x^2$:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Estos pares ordenados indican una gráfica de la forma que se muestra en la figura P.17. Esta curva se llama **parábola**. El dominio es $(-\infty, \infty)$ ya que se puede usar cualquier número real para x en $y = x^2$. Puesto que ninguna coordenada y es negativa, la gráfica está sobre o encima del eje de las x. El rango es $[0, \infty)$.

La gráfica de la calculadora de la figura P.18 apoya estas conclusiones. Las gráficas de calculadora pueden tener más puntos de los que usted dispuso para graficar a mano.

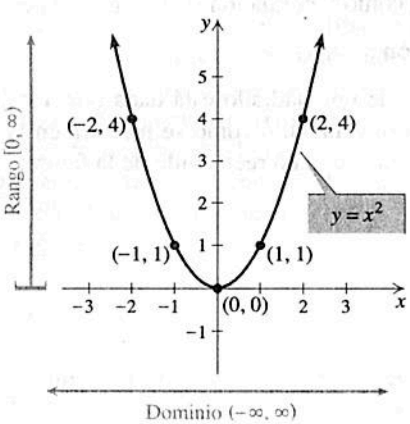


Figura P.17

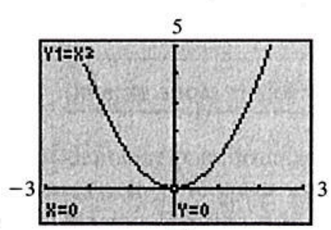


Figura P.18

(b) Realice una tabla de pares ordenados que satisfagan $y = |x| - 40$:

x	-40	-20	0	20	40
$y = \vert x \vert - 40$	0	-20	-40	-20	0

El dibujo de estos pares ordenados indica la gráfica en forma de V de la figura P.19. A partir de la gráfica se ve que el dominio es $(-\infty, \infty)$ y el rango es $[-40, \infty)$.

La gráfica de la calculadora en la figura P.20 apoya estas conclusiones.

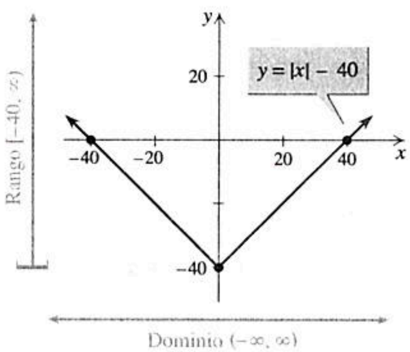


Figura P.19

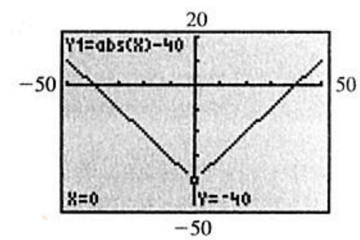


Figura P.20

Intente ahora el ejercicio 23.

El siguiente ejemplo muestra dos funciones cuyo dominio no es todo el conjunto de los números reales.

EJEMPLO 4 Trazo mediante el dibujo de pares ordenados

Trace cada función y establezca el dominio y el rango.

(a) $y = \sqrt{x - 20}$ **(b)** $y = \dfrac{1}{x}$

Solución

(a) Realice una tabla de pares ordenados que satisfaga $y = \sqrt{x - 20}$.

x	20	21	24	29	36
$y = 2\ \overline{x - 20}$	0	1	2	3	4

Dibuje estos pares ordenados y bosqueje una curva que pase a través de ellos, como se muestra en la figura P.21 de la siguiente página. Esta curva es la mitad de una parábola. Si $\sqrt{x - 20}$ es un número real, entonces $x - 20 \geq 0$, o $x \geq 20$. Por lo que el dominio es $[20, \infty)$. En la gráfica se observa que el rango de las coordenadas y es de 0 hacia arriba. Por lo que el rango consiste de los números reales no negativos, $[0, \infty)$.

La gráfica de calculadora en la figura P.22 de la página siguiente apoya estas conclusiones.

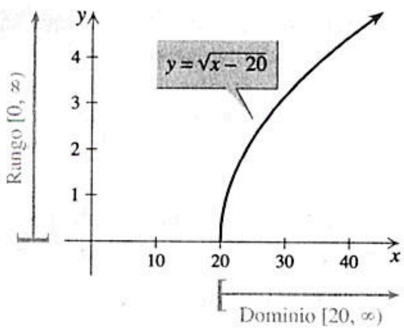


Figura P.21

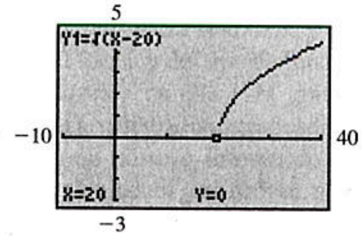


Figura P.22

(b) Realice una tabla de pares ordenados que satisfaga $y = 1/x$:

x	-2	-1	$-1/2$	$1/2$	1	2
$y = 1/x$	$-1/2$	-1	-2	2	1	$1/2$

Observe que conforme x se hace más grande, y se hace más pequeña, y viceversa. Al dibujar estos pares ordenados se obtiene la gráfica que se muestra en la figura P.23. El dominio consiste de todos los números reales excepto el 0, $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

La gráfica de la calculadora en la figura P.24 apoya estas conclusiones.

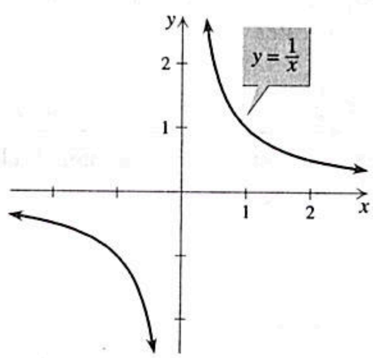


Figura P.23

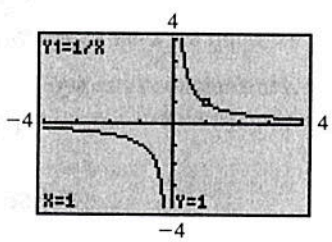


Figura P.24

Intente ahora el ejercicio 33.

Notación de función Si y es una función de x, se puede usar la expresión $f(x)$, en lugar de y, para la variable dependiente. La notación $f(x)$ se lee "el valor de f en x" o simplemente "f de x". Por lo que y y $f(x)$ son ambos símbolos para la segunda coordenada cuando la primera coordenada es x, y se puede escribir $y = f(x)$. Por ejemplo, se podría escribir $y = \sqrt{x - 40}$ para la función $y = \sqrt{x - 40}$. La notación $f(x)$ se llama **notación de función**.

EJEMPLO 5 Uso de la notación de función

Determine cada uno de los siguientes valores para la función $f(x) = \sqrt{2x + 9}$.

(a) $f(20)$ **(b)** x, si $f(x) = 0$ **(c)** $f(-6)$ **(d)** $f(-x)$

Solución

(a) La expresión $f(20)$ es la segunda coordenada cuando la primera coordenada es 20. Para determinar el valor de $f(20)$ sustituya x por 20 en la fórmula $f(x) = \sqrt{2x + 9}$:

$$f(20) = \sqrt{2 \cdot 20 + 9} = \sqrt{49} = 7$$

(b) Para encontrar un valor para x tal que la segunda coordenada sea 0, se debe resolver $\sqrt{2x + 9} = 0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x + 9} &= 0 \\ 2x + 9 &= 0 \\ 2x &= -9 \\ x &= -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

por lo que $x = -9/2$.

(c) La expresión $f(-6)$ no está definida, porque el dominio $f(x) = \sqrt{2x + 9}$ es el intervalo $[-9/2, \infty)$.

(d) La expresión $f(-x)$ es la segunda coordenada cuando la primera coordenada es $-x$. Por lo que sustituyendo x por $-x$ en la fórmula $f(x) = \sqrt{2x + 9}$:

$$f(-x) = \sqrt{2(-x) + 9} = \sqrt{-2x + 9}$$

Intente ahora el ejercicio 41.

Se pueden usar otras letras diferentes de f en la notación de función. Por ejemplo, se podría tener $h(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$. Si una función describe alguna aplicación real, entonces se puede usar comúnmente alguna letra de ajuste con la situación. Por ejemplo, si las sandías cuestan \$3.00 por pieza, entonces el costo de n sandías está dado por la función $C(n) = 3n$. El costo de 5 sandías es $C(5) = 3 \cdot 5 = \$15$. En trigonometría las abreviaturas sen, cos y tan se usan en lugar de una sola letra para nombrar a las funciones trigonométricas. Las variables dependientes se escriben como sen(x), cos(x) y tan(x).

PARA PENSAR ¿Falso o verdadero? Explique

1. El número de galones que se pueden comprar con \$20 es una función del precio del galón.
2. Cada calificación del examen de los estudiantes es una función del IQ de los estudiantes.
3. Cualquier conjunto de pares ordenados es una función.
4. Si $y = x^2$ entonces y es una función de x.
5. Si x es la variable independiente, entonces $f(x)$ es la variable dependiente.
6. El dominio de $f(x) = 1/x$ es $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
7. El dominio de $g(x) = |x - 3|$ es $[3, \infty)$.
8. El rango de $y = 8 - x^2$ es $(-\infty, 8]$.
9. Si $f(x) = \dfrac{t - 2}{t + 2}$, entonces $f(0) = -1$.
10. Si $f(x) = x - 5$ y $f(a) = 0$, entonces $a = 5$.

66. *Límite de la manga* Las reglas internacionales de navegación mar adentro requieren que el valor del control de volcadura C (del ejercicio anterior) sea por seguridad menor o igual a 2. ¿Cuál es la manga máxima permisible (a la pulgada más cercana) para un bote con un desalojamiento de 22,800 libras? Para un desalojamiento fijo, ¿tiene un bote un valor más o menos parecido al control de volcadura conforme su manga se hace más grande?

P.3 Familias de funciones, transformaciones y simetría

Si a, h y k son números reales con $a \neq 0$, entonces la gráfica de $y = af(x - h) + k$ es una **transformación** de la gráfica de $y = f(x)$. Todas las transformaciones de una función forman una **familia de funciones**. Por ejemplo, cualquier función de la forma $y = a\sqrt{x - h} + k$ está en la familia raíz cuadrada porque es una transformación de $y = \sqrt{x}$. Si una transformación cambia la forma de una gráfica entonces se trata de una transformación **no rígida**. De otra forma, es **rígida**. Se estudiarán dos tipos de transformaciones rígidas, *reflexión* y *traslación*, y dos tipos de transformaciones no rígidas, *extensión* y *compresión*. Se inicia con las transformaciones de reflexión.

Reflexión La gráfica de $f(x) = x^2$ pasa a través de los puntos (0, 0), (1, 1) y (2, 4). La gráfica de $g(x) = -x^2$ pasa a través de los puntos (0, 0), (1, −1) y (2, −4). Para cada par ordenado (x, y) en la gráfica de f, el par ordenado $(x, -y)$ está en la gráfica de g como se muestra en la figura P.25. Ya que la gráfica de g es una imagen espejo (o reflexión) de la gráfica de $f(x) = x^2$, la función g está en la familia x^2 o familia de cuadrados.

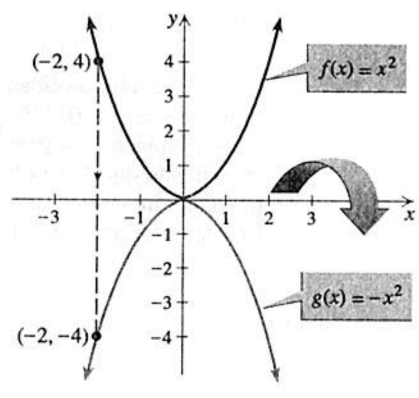


Figura P.25

Reflexión
La gráfica de $y = -f(x)$ es una **reflexión** en el eje x de la gráfica de $y = f(x)$.

El saber que una gráfica es una reflexión de una gráfica conocida hace el trazado más fácil. Al reflejar la gráfica conocida en el eje x se obtiene una nueva gráfica.

EJEMPLO 1 Trazo con el uso de reflexión

Dibuje las gráficas de cada par de funciones en el mismo plano coordenado.

(a) $f(x) = x^3, g(x) = -x^3$ **(b)** $f(x) = |x|, g(x) = -|x|$

Solución

(a) Realice una tabla de pares ordenados para f como la siguiente:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = x^3$	-8	-1	0	1	8

Dibuje la gráfica de f que pasa a través de estos pares ordenados como se muestra en la figura P.26. Puesto que $g(x) = -f(x)$, la gráfica de g se puede obtener mediante la reflexión de la gráfica de f en el eje x y g es un miembro de la familia de cubos. Cada punto en la gráfica de f corresponde a un punto en la gráfica de g con la coordenada y opuesta. Por ejemplo, (2, 8) en la gráfica de f corresponde a (2, −8) en la gráfica de g. Ambas gráficas se muestran en la figura P.26.

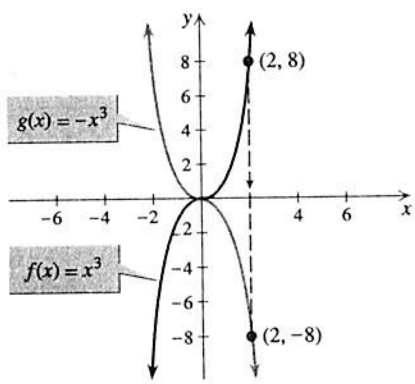


Figura P.26

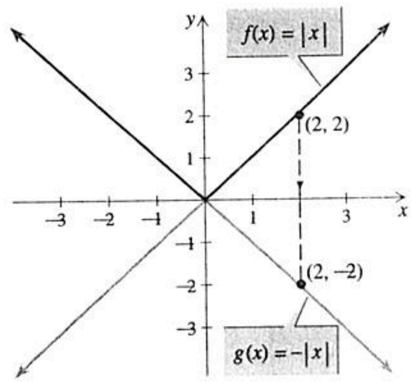


Figura P.27

(b) La gráfica de f pertenece a la familia de gráficas en forma de V de la función valor absoluto como se muestra en la figura P.27. Puesto que $g(x) = -f(x)$, la gráfica de g se puede obtener al reflejar la gráfica de f en el eje de las x y g es un miembro de la familia valor absoluto. Cada punto de la gráfica de f corresponde a un punto de la gráfica de g con la coordenada y opuesta. Por ejemplo, (2, 2) en la f corresponde a (2, −2) en g. Ambas gráficas se muestran en la figura P.27.

Intente ahora el ejercicio 1.

Traslación Considere tres funciones de la familia raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x} + 3$ y $h(x) = \sqrt{x} - 5$. En la expresión $\sqrt{x} + 3$, sumando 3 en la última operación realizada se obtiene la coordenada y. Cada punto de la gráfica de g está exactamente 3 unidades arriba de un punto correspondiente de la gráfica de f. Esta traslación de puntos da como resultado que g tenga la misma forma que la gráfica de f. También, cada punto de la gráfica de h está exactamente a 5 unidades debajo de un punto correspondiente de la gráfica de f. Vea la figura P.28.

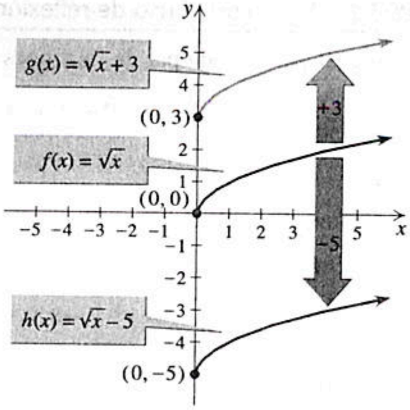


Figura P.28

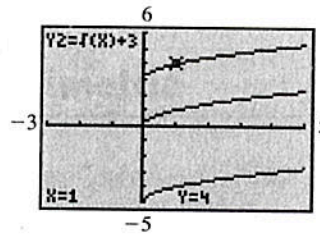


Figura P.29

La relación entre las gráficas de f, g y h se puede observar con la calculadora graficadora de la figura P.29. Con una calculadora graficadora usted puede fácilmente experimentar con otras funciones para ver cómo un ligero cambio en la fórmula cambia la gráfica.

Traslación hacia arriba o hacia abajo

Si $k > 0$, entonces la gráfica de $y = f(x) + k$ es una **traslación de k unidades hacia arriba** de la gráfica de $y = f(x)$. Si $k < 0$, entonces la gráfica de $y = f(x) + k$ es una **traslación** de k unidades **hacia abajo** de la gráfica de $y = f(x)$.

Saber que la gráfica de una función es una traslación de la gráfica de una función conocida hace el trazado más fácil. El uso de una calculadora graficadora para ayudarlo a a trazar la información se descubrirá en esta sección le será útil para evitar errores.

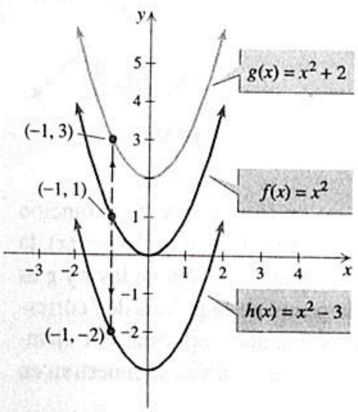


Figura P.30

EJEMPLO 2 Trazo con el uso de traslación

Grafique las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 2$ y $h(x) = x^2 - 3$ en el mismo plano coordenado.

Solución

Puesto que todas estas funciones están en la familia de cuadrados, las gráficas son todas parábolas. Primero dibuje la conocida gráfica de $f(x) = x^2$ que pasa por los puntos $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(2, 4)$, como se muestra en la figura P.30. Ya que $g(x) = f(x) + 2$, la gráfica de g se puede obtener al trasladar la gráfica de f, 2 unidades hacia arriba. Dado que $h(x) = f(x) - 3$, la gráfica de h se puede obtener al trasladar la gráfica de f, 3 unidades hacia abajo. Por ejemplo, el punto $(-1, 1)$ en la gráfica de f se mueve hacia arriba a $(-1, 3)$ en la gráfica de g y hacia abajo a $(-1, -2)$ en la gráfica de h. Estas tres gráficas se muestran en la figura P.30.

Intente ahora el ejercicio 5.

Considere las gráficas de $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x - 3}$ y $h(x) = \sqrt{x + 5}$ en la figura P.31 de la siguiente página. En la expresión $\sqrt{x - 3}$, restar 3 es la primera operación que se realiza. Por ello, cada punto de la gráfica de g está exactamente a 3 unidades a la derecha de un punto correspondiente de la gráfica de f. (Se debe iniciar con un valor grande de x para obtener la misma coordenada y, ya que primero se le restó 3.) Cada punto en la gráfica de h está exactamente a 5 unidades a la izquierda de un punto correspondiente de la gráfica de f. Compare las gráficas en la figura P.31 y en la P.28. Observe que una pequeña diferencia en la fórmula hace una gran diferencia en la posición de la gráfica.

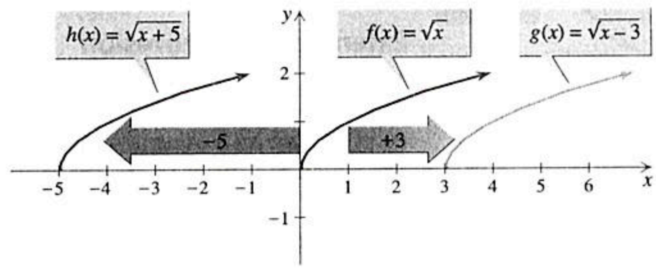


Figura P.31

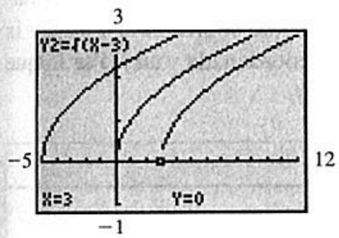


Figura P.32

Se muestran las gráficas de la calculadora graficadora de f, g y h en la figura P.32. Algunas calculadoras necesitan paréntesis que abarquen la expresión que está contenida dentro del símbolo de radical. Asegúrese de observar la diferencia entre $y = \sqrt{(x)} - 3$ y $y = \sqrt{(x)} - 3$ en estas calculadoras.

Traslación a la derecha o a la izquierda

Si $h > 0$, entonces la gráfica de $y = f(x - h)$ es una **traslación de h unidades hacia la derecha** de la gráfica de $y = f(x)$. Si $h < 0$, entonces la gráfica de $y = f(x - k)$ es una **traslación de $|h|$ unidades hacia la izquierda** de la gráfica de $y = f(x)$.

EJEMPLO 3 Trazo con el uso de traslación

Dibuje la gráfica de cada función.

(a) $f(x) = |x - 1|$ **(b)** $f(x) = (x + 3)^2$

Solución

(a) La función $f(x) = |x - 1|$ está en la familia de valor absoluto y su gráfica es una traslación de 1 unidad a la derecha de $g(x) = |x|$. Calcule unos pocos de pares ordenados para obtener una gráfica exacta. Los puntos (0, 1), (1, 0) y (2, 1) están en la gráfica de $f(x) = |x - 1|$ que se muestra en la figura P.33.

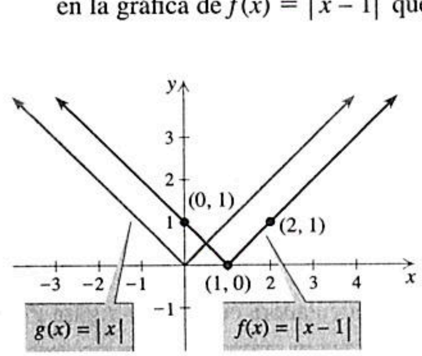


Figura P.33

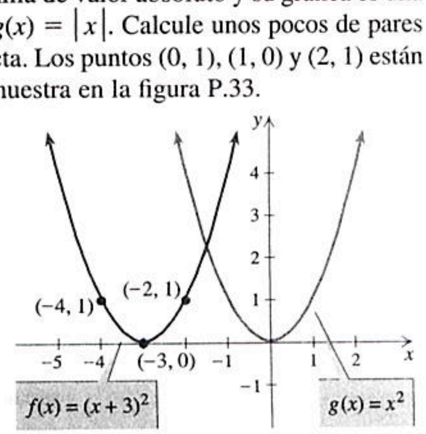


Figura P.34

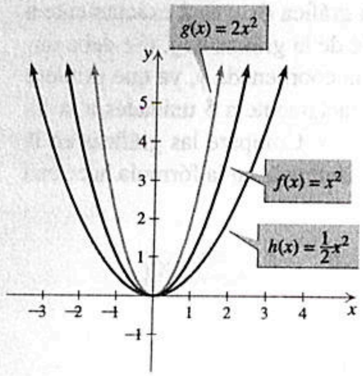


Figura P.35

(b) La función $f(x) = (x + 3)^2$ está en la familia de cuadrados y su gráfica es una traslación de 3 unidades a la izquierda de la gráfica de $g(x) = x^2$. Calculando unos pocos de pares ordenados se obtiene una gráfica exacta. Los puntos $(-3, 0)$, $(-2, 1)$ y $(-4, 1)$ están en la gráfica que se muestra en la figura P.34.

Intente ahora el ejercicio 9.

Extensión y compresión Considere las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ y $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ que se muestra en la figura P.35. Para cualquier coordenada x, la coordenada y en g es del doble de la correspondiente coordenada y en f, y la coordenada y en h es de la mitad de la correspondiente coordenada y en f. Por lo que g se obtiene al "estirar" f y h se obtiene comprimiendo f.

Extensión y compresión

La gráfica de $y = af(x)$ se obtiene a partir de la gráfica de $y = f(x)$ por

1. **extensión** la gráfica de $y = f(x)$ por a cuando $a > 1$, o
2. **compresión** la gráfica de $y = f(x)$ por a cuando $0 < a < 1$.

EJEMPLO 4 Trazo con el uso de extensión y de compresión

Trace las funciones $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2\sqrt{x}$ y $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ en el mismo plano coordenado.

Solución

La gráfica de g se obtiene al extender la gráfica de f, y la gráfica de h se obtiene al comprimir la gráfica de f. La gráfica de f incluye los puntos $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(4, 2)$. La gráfica de g incluye los puntos $(0, 0)$, $(1, 2)$ y $(4, 4)$. La gráfica de h incluye los puntos $(0, 0)$, $(1, 0.5)$ y $(4, 1)$. En la figura P.36 se muestran las gráficas.

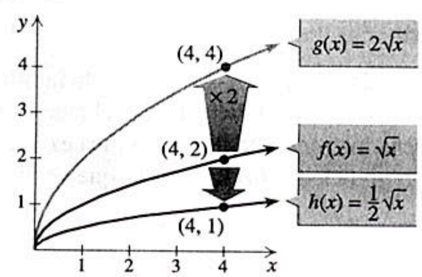


Figura P.36

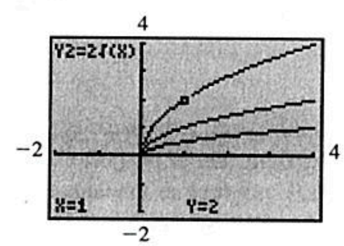


Figura P.37

En la figura P.37 se muestran las funciones f, g y h en una calculadora graficadora. Observe cómo afecta la ventana de visión la forma de la gráfica. No se muestran tan separadas en la calculadora como en la figura P.36.

Intente ahora el ejercicio 13.

Una función que implica más de una transformación se puede trazar con el empleo del siguiente procedimiento.

PROCEDIMIENTO Transformaciones múltiples

El trazo de una función que implica más de una transformación se realiza en el siguiente orden:

1. Traslación horizontal
2. Extensión o compresión
3. Reflexión
4. Traslación vertical

La función en el siguiente ejemplo implica cada una de las cuatro transformaciones anteriores.

EJEMPLO 5 Trazo con el empleo de varias transformaciones

Trace la función $y = 4 - 2\sqrt{x+1}$ y establezca el dominio y el rango.

Solución

Primero reconozca que esta función pertenece a la familia raíz cuadrada. Por lo que su gráfica es una transformación de la gráfica de $y = \sqrt{x}$. La gráfica de $y = \sqrt{x+1}$ es una traslación *horizontal* de una unidad a la izquierda de la gráfica de $y = \sqrt{x}$. La gráfica de $y = 2\sqrt{x+1}$ se obtiene de $y = \sqrt{x+1}$ al *extenderla* en un factor de 2. Al *reflejar* $y = 2\sqrt{x+1}$ en el eje x se obtiene la gráfica de $y = -2\sqrt{x+1}$. Por último, la gráfica de $y = 4 - 2\sqrt{x+1}$ es una traslación *vertical* de $y = -2\sqrt{x+1}$, cuatro unidades hacia arriba. En la figura P.38 se muestran cada una de estas gráficas.

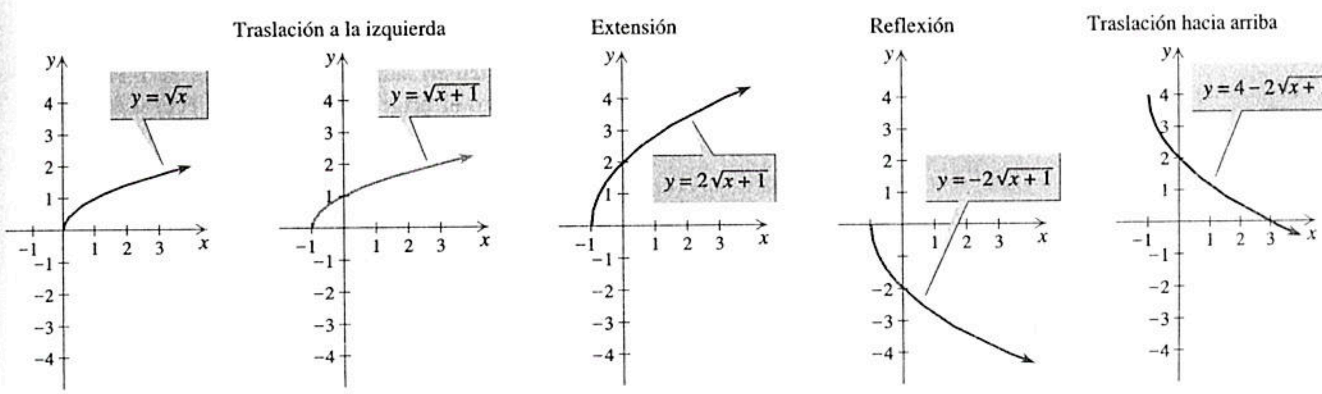


Figura P.38

Intente ahora el ejercicio 31.

Simetría La gráfica de $g(x) = -x^2$ es una reflexión en el eje de las x de la gráfica de $f(x) = x^2$. Si se doblara el papel a lo largo del eje x, las gráficas coincidirían.

Vea la figura P.39. La simetría que se llama reflexión ocurre entre dos funciones, pero la gráfica de $f(x) = x^2$ tiene una simetría en sí misma.

Los puntos tales como (2, 4) y (−2, 4) están en la gráfica y son equidistantes al eje de las y. Al doblar el papel, se tiene que todos los pares de dichos puntos están unidos. Vea la figura P.40. La razón de esta simetría con respecto al eje y es el hecho de que $f(-x) = f(x)$ para cualquier número real x. Se obtiene la misma coordenada y, ya sea al evaluar la función en el número o en su opuesto.

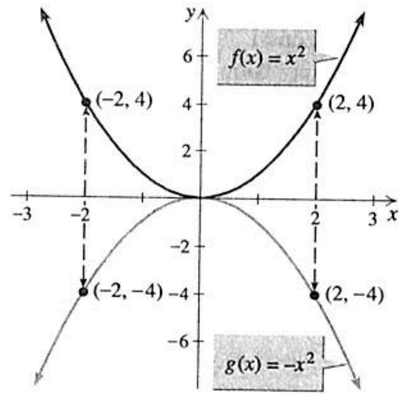


Figura P.39

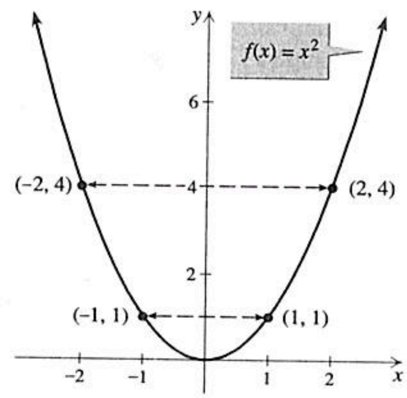


Figura P.40

Simétrica con respecto al eje *y*

Si $f(-x) = f(x)$ para cada valor de x en el dominio de la función f, entonces f es una **función par** y su gráfica es simétrica **con respecto al eje y**.

La función $f(x) = x^2$ es un ejemplo de una función par y su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

Considere la gráfica $f(x) = x^3$ que se muestra en la figura P.41. Ésta no es simétrica con respecto al eje y como la gráfica $f(x) = x^2$, pero tiene otra clase de simetría. En la gráfica de $f(x) = x^3$ se encuentran pares de puntos tales como (2, 8) y (−2, −8). Estos puntos son equidistantes desde el origen y están en lados opuestos del origen. Por lo que la simetría de esta gráfica es con respecto al origen. En este caso, $f(x)$ y $f(-x)$ no son iguales, pero $f(-x) = -f(x)$.

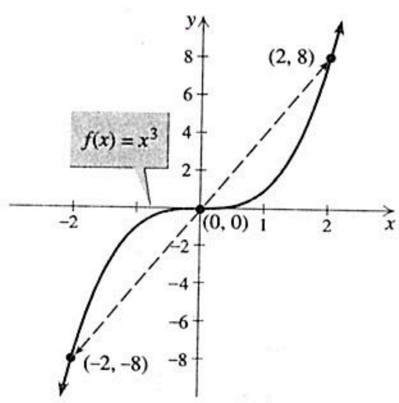


Figura P.41

1. La g
x de
2. La gı
cha c
3. La gı
2 uni
de la
4. La gr
de la
5. Las fı
tienen

Simetría con respecto al origen

Si $f(-x) = -f(x)$ para cada valor de x en el dominio de la función f, entonces f es una **función impar** y su gráfica es **simétrica con respecto al origen**.

Es posible observar una gráfica y ver si ésta es simétrica con respecto al eje y o al origen, pero si se puede identificar simetría *antes* del trazo, éste resulta más fácil y más exacto. Con el uso de las definiciones se puede determinar si una función es par, impar o ninguna de las dos, a partir de la fórmula que define la función. Si se conoce la simetría (o la ausencia de ésta) desde un principio, entonces se sabe qué se puede esperar cuando se dibujen los puntos.

EJEMPLO 6 Determinación de simetría en una gráfica

Analice la simetría de la gráfica de cada función.

(a) $f(x) = 5x^3 - x$ **(b)** $f(x) = |x| + 3$ **(c)** $f(x) = x^2 - 3x + 6$

Solución

(a) Sustituya x por $-x$ en la fórmula para $f(x)$ y simplifique:

$$f(-x) = 5(-x)^3 - (-x) = -5x^3 + x$$

¿Es $f(-x)$ igual a $f(x)$ o el opuesto de $f(x)$? Puesto que $-f(x) = -5x^3 + x$, se tiene que $f(-x) = -f(x)$. Por lo que f es una función impar y la gráfica es simétrica con respecto al origen.

(b) Puesto que $|-x| = |x|$ para cualquier número real x, se tiene que $f(-x) = |-x| + 3 = |x| + 3$. Ya que $f(-x) = f(x)$, la función es par y la gráfica es simétrica con respecto al eje y.

(c) En este caso, $f(-x) = (-x)^2 - 3(-x) + 6 = x^2 + 3x + 6$. Por lo que $f(-x) \neq f(x)$, y $f(-x) \neq -f(x)$. Esta función no es par ni impar y su gráfica no presenta ningún tipo de simetría.

Intente ahora el ejercicio 49.

PARA PENSAR ¿Falso o verdadero? Explique

1. La gráfica de $f(x) = (-x)^4$ es una reflexión en el eje x de la gráfica de $g(x) = x^4$.
2. La gráfica de $f(x) = x^2 - 4$ está 4 unidades a la derecha de la gráfica de $g(x) = x^2$.
3. La gráfica de $y = |x + 2| + 2$ es una traslación de 2 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba de la gráfica de $y = |x|$.
4. La gráfica de $f(x) = -3$ es una reflexión en el eje x de la gráfica de $g(x) = 3$.
5. Las funciones $y = x^2 + 4x + 1$ y $y = (x + 2)^2 - 3$ tienen la misma gráfica.
6. La gráfica de $y = -(x - 3)^2 - 4$ se puede obtener al mover $y = x^2$ una distancia de 3 unidades a la derecha y 4 unidades hacia abajo, y después reflejarla con respecto al eje x.
7. Si $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 5$, entonces $f(-x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$.
8. Las gráficas de $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{-x}$ son idénticas.
9. Si $f(x) = x^3 - x$, entonces $f(-x) = -f(x)$.
10. La gráfica de $y = x^3$ es simétrica con respecto al origen.