Función Exponencial

Definición: La función exponencial tiene la forma: $f(x) = a^x$, donde a > 0 y a ≠1

Cada número real *x* le hace corresponder la potencia a^x se llama **función exponencial de base *a* y exponente *x*.**

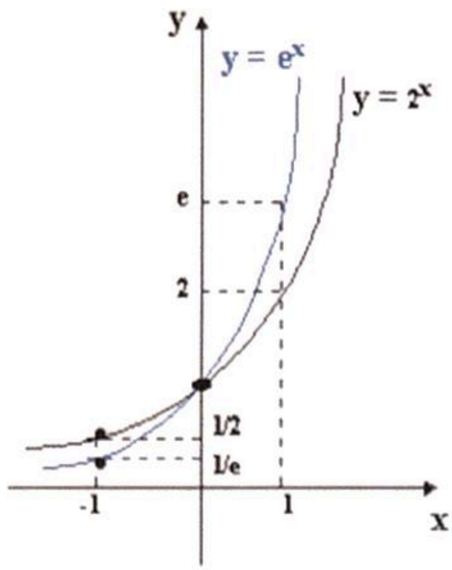
Observación: Cuando *a* = *e* ,donde *e* es el número irracional (e = 2.7182818284….), la función exponencial e^x ,se llama:
función exponencial de base e

Es importante considerar las siguientes leyes:

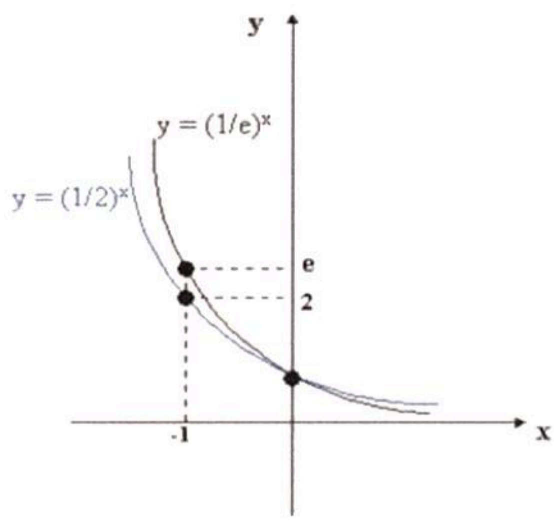
Leyes de los exponentes

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
4. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
5. $\left[\dfrac{a}{b}\right]^x = \dfrac{a^x}{b^x}$
6. $\left[\dfrac{a}{b}\right]^{-x} = \left[\dfrac{b}{a}\right]^x$
7. $a^0 = 1$

Gráficas de la funciones exponenciales



Note que cuando la base *a* es mayor que 1,la función exponencial $y = a^x$ no está acotada superiormente. Es decir , a^x crece sin límite al aumentar la variable *x*. Además, ésta función tiene al cero como extremo inferior. Esto es , a^x tiende a cero, cuando *x* toma valores grandes pero negativos.



Note que cuando la base *a* < 1, la función exponencial $y = a^x$ no está acotada superiormente, pero su comportamiento para valores grandes de *x*, en valor absoluto, es diferente. Así, a^x crece sin límite, al tomar *x* valores grandes, pero negativos y a^x tiende a cero, cuando la variable *x* toma valores grandes positivos

EJERCICIOS DE FUNCIÓN EXPONENCIAL

En los ejercicios 1 a 8, dibuje la gráfica de la función exponencial. Compruebe la gráfica en la graficadora.

1. $f(x) = 3^x$
2. $g(x) = 4^x$
3. $g(x) = 3^{-x}$
4. $f(x) = 4^{-x}$
5. $F(x) = (\frac{1}{5})^x$
6. $G(x) = 10^x$
7. $G(x) = e^{-x}$
8. $F(x) = e^{2x}$

En los ejercicios 9 a 14, dibuje la gráfica de la función F mediante transformaciones geométricas de la gráfica de f.

9. (a) $F(x) = 3^{x-4}, f(x) = 3^x$
   (b) $F(x) = 3^x - 4, f(x) = 3^x$
10. (a) $F(x) = 2^{x+3}, f(x) = 2^x$
    (b) $F(x) = 2^x + 3, f(x) = 2^x$
11. (a) $F(x) = -e^{x+2}, f(x) = e^x$
    (b) $F(x) = -e^x + 2, f(x) = e^x$
12. (a) $F(x) = -2e^{x-1}, f(x) = e^x$
    (b) $F(x) = -2e^x - 1, f(x) = e^x$
13. (a) $F(x) = 2^{x+1} + 3, f(x) = 2^x$
    (b) $F(x) = e^{x-3} - 4, f(x) = e^x$
14. (a) $F(x) = 3^{x-5} - 2, f(x) = 3^x$
    (b) $F(x) = e^{x+4} + 1, f(x) = e^x$

En los ejercicios 21 a 33, resuelva el problema empleando un modelo matemático que implique una función exponencial. Escriba una conclusión.

21. El valor de cierta máquina t años después de su compra es $\$V(t)$, donde $V(t) = ke^{-0.3t}$ y k es una constante. **(a)** Determine k si se sabe que la máquina se compró hace 8 años en \$10 000. **(b)** Con el valor de k de la parte (a), trace la gráfica de V. **(c)** Determine algebraicamente el valor actual de la máquina, y compruebe su respuesta en la graficadora.

22. Si $f(t)$ gramos de una sustancia radiactiva están presentes después de t segundos, entonces $f(t) = ke^{0.3t}$, donde k es una constante. **(a)** Determine k si inicialmente se tienen presentes 100 g de la sustancia. **(b)** Con el valor de k de la parte (a), trace la gráfica de f. **(c)** Determine algebraicamente qué cantidad de la sustancia habrá después de 5 s, y compruebe la respuesta en la graficadora.

23. La población de cierta ciudad crece a una tasa proporcional a su tamaño. Si esta tasa es de 6% y si la población después de t años es $P(t)$, entonces $P(t) = ke^{0.06t}$, donde k es una constante. **(a)** Determine k si la población actual es de 10 000. **(b)** Con el valor de k de la parte (a) trace la gráfica de P. Calcule algebraicamente la población esperada **(c)** después de 10 años y **(d)** después de 20 años. Compruebe las respuestas de las partes (c) y (d) en la graficadora.

24. Suponga que $f(t)$ es el número de bacterias presentes en cierto cultivo a los t minutos y $f(t) = ke^{0.035t}$, donde k es una constante. **(a)** Determine k si hay 5 000 bacterias presentes después de transcurridos 10 min. **(b)** Con el valor de k de la parte (a) trace la gráfica de f. **(c)** Encuentre, de manera algebraica, cuántas bacterias había inicialmente, y compruebe la respuesta en la graficadora.

25. Si $P(h)$ libras por pie^2 es la presión atmosférica a una altura de h pies sobre el nivel del mar, entonces $P(h) = ke^{-0.00003h}$, donde k es una constante. Si la presión atmosférica al nivel del mar es de 2 116 lb/pie^2, determine la presión atmosférica que actúa sobre un avión que vuela a una altura de 10 000 pie. Compruebe la respuesta en la graficadora.

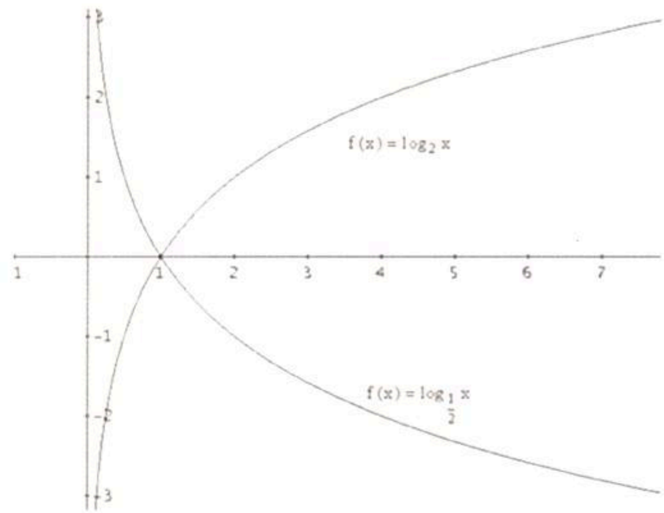
26. En 1985, se estimó que en los 20 años siguientes la población de cierta ciudad constaría de $f(t)$ personas t años a partir de 1985, siendo $f(t) = C \cdot 10^{kt}$, donde C y k son constantes. Si la población en 1985 era de 1 000 y en 1990 era de 4 000, ¿cuál es la población esperada para el año 2000? Compruebe la respuesta en la graficadora.

27. Una pintura abstracta históricamente importante fue comprada en 1922 a \$200, y su valor se ha duplicado cada 10 años desde su compra. Si $\$f(t)$ es el valor t años después de su compra: **(a)** defina $f(t)$, y **(b)** ¿cuál será el valor de la pintura en 1992?

28. Después de t horas de practicar mecanografía, se determinó que cierta persona podía mecanografiar $f(t)$ palabras por minuto, donde $f(t) = 90(1 - e^{-0.03t})$. **(a)** ¿Cuántas palabras por minuto puede mecanografiar la persona después de 30 horas de práctica? **(b)** ¿Cuántas palabras por minuto puede esperarse que mecanografíe la persona? **(c)** Utilice la respuesta de la parte (b) para determinar la asíntota horizontal de la gráfica de f y trace esta recta y la gráfica de f en el mismo rectángulo de inspección.

Función Logarítmica

Son funciones de la forma $f(x) = \log_a x$; a > 0 ; a ¹ 1.



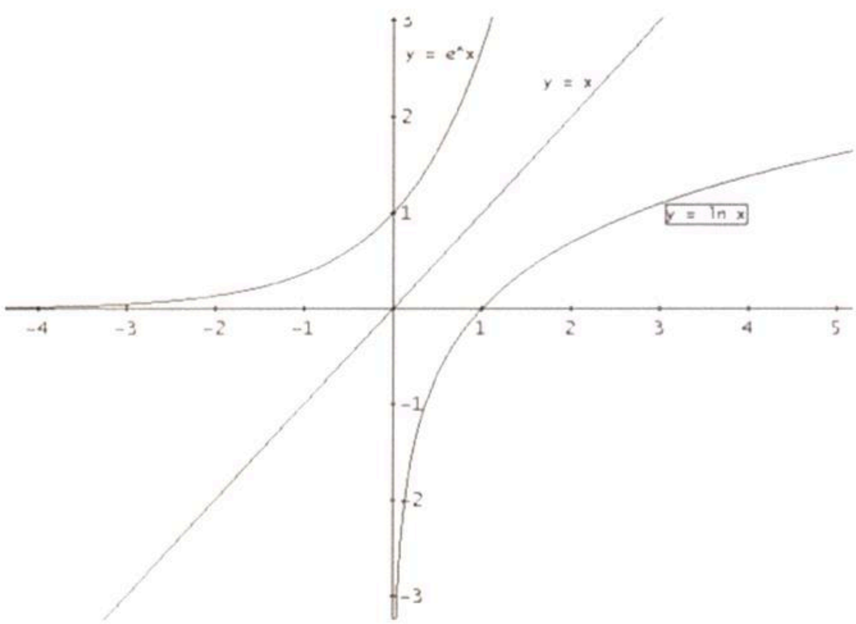
Propiedades:

1. Dom f(x) = {x Î Â / x > 0}; Ranf(x) = Â
2. Si a > 1, la función es creciente en todo su dominio.
   Si 0 < a < 1, la función es decreciente en todo su dominio.
3.. La recta x = 0, es una asíntota vertical.

Las funciones logarítmicas y exponenciales de igual base, son funciones inversas.

Sean $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a x$, entonces:

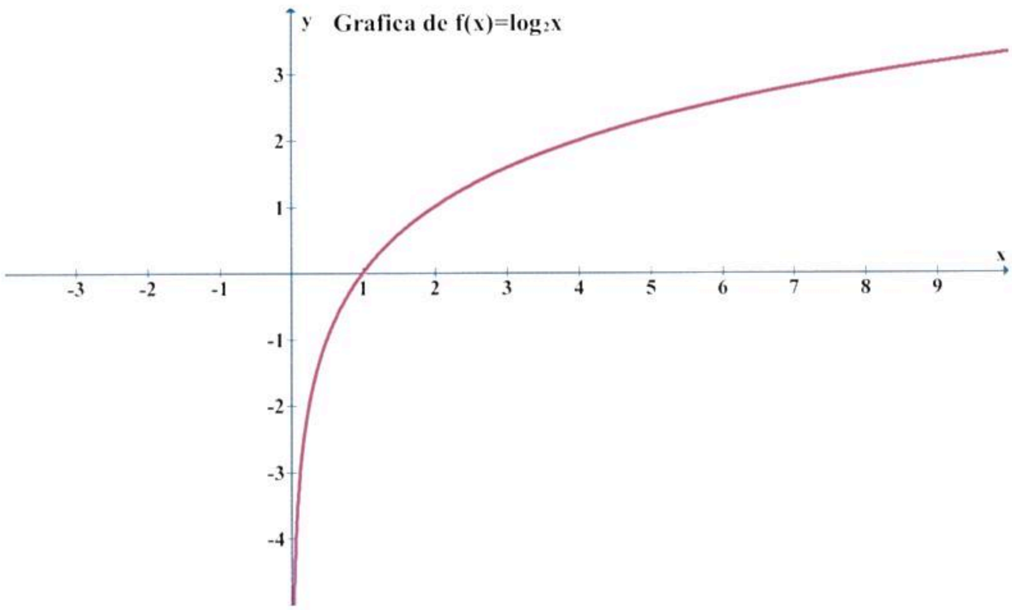
a) $(f \circ g) = f(g(x)) = a^{\log_a x} = x$ b) $(g \circ f) = g(f(x)) = \log_a a^x = x$



Ejercicios
Función Logarítmica

Explica con tus palabras que cambios sufre la grafica de la función $f(x) = log_2 x$, al realizar cada uno de los siguientes cambios:

1. $f(x) = -log_2 x$
2. $f(x) = log_2(-x)$
3. $f(x) = 3 \cdot log_2 x$
4. $f(x) = log_2(x+1)$
5. $f(x) = log_2 x + 3$



Determina grafica, ecuación de la asíntota, dominio y rango de las siguientes funciones:

6. $f(x) = log_2(x+1)$
7. $f(x) = log_{\frac{1}{2}}(x+2)$
8. $f(x) = 2\ln(3x)$
9. $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1-x) + 2$

Resuelve los siguientes problemas de aplicación:

10. **Terremotos.** El terremoto que ocurrió en 1971 en San Fernando, California liberó 1.99 x 10^{14} joules de energia. Calcule su magnitud en la escala de Richter con la fórmula $M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$ donde $E_0=10^{4.40}$ joules. Redondea tu resultado a un decimal.

11. **Sonido** $D = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$**, donde $I_0=10^{-12}$wat por metro cuadrado.**

    Encuentra el número de decibeles de un susurro con una intensidad de sonido de 5.20 x 10^{-10} wat. Redondea tu resultado con dos decimales.

12. **Velocidad de un cohete** $D = c\ln\left(\frac{W_t}{W_b}\right)$

Un típico cohete con posquemador puede tener como razón de sus pesos $\frac{W_t}{W_b} = 18.7$ y una velocidad del escape c=2.¿Podría este cohete una velocidad de 9.0 kilómetros por segundo?

Ecuación exponencial y logarítmica

Logaritmos

Los logaritmos fueron introducidos en las matemáticas con el propósito de facilitar, simplificar o incluso, hacer posible complicados cálculos numéricos. Utilizando logaritmos podemos convertir: productos en sumas, cocientes en restas, potencias en productos y raíces en cocientes.

Definición de logaritmo: Se llama logaritmo en base a del número x al exponente b al que hay que elevar la base para obtener dicho número.

$$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$$

que se lee : "el logaritmo en base *a* del número *x* es *b*" , o también : "el número *b* se llama logaritmo del número *x* respecto de la base *a* " .

Como podemos ver, un logaritmo no es otra cosa que un ***exponente*** , hecho que no debemos olvidar cuando trabajemos con logaritmos.

La constante **a** es un número real positivo distinto de 1, y se denomina **base** del sistema de logaritmos. La potencia a^b para cualquier valor real de b solo tiene sentido si a > 0.

Ejemplos:

1) ¿A qué exponente hay que elevar la base 5 para obtener 25? Al exponente 2, ya que $5^2 = 25$. Decimos que **"el logaritmo de 25 en la base 5 es 2"**. Simbólicamente lo expresamos de la forma $\log_5 25 = 2$. De manera que, $\mathbf{\log_5 25 = 2}$ es equivalente a $\mathbf{5^2 = 25}$. (Observa que un logaritmo es un exponente.)

2) También podemos decir que $\mathbf{2^3 = 8}$ es equivalente a $\mathbf{\log_2 8 = 3}$.

Propiedades de los logaritmos, a>0, a≠0
• $\log_a 1 = 0$ • $\log_a a = 1$ • $\log_a a^x = x$ • $a^{\log_a x} = x$ • $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$ • $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$ • $\log_a\left(u^n\right) = n \cdot \log_a u$ • $\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n}\log_a u$

Logaritmos Decimales: Se llaman logaritmos decimales o vulgares a los logaritmos que tienen por base el número 10. Al ser muy habituales es frecuente no escribir la base.

$$\log_{10} x = \log x$$

Logaritmos Neperianos: Se llaman logaritmos neperianos, naturales o hiperbólicos a los logaritmos que tienen por base el número *e*.

$$\log_e x = \ln x = Lx$$

Cambio de Base:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \quad ; \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\log x}{\log a}$$

Antilogaritmo: Es el número que corresponde a un logaritmo dado. Consiste en el problema inverso al cálculo del logaritmo de un número.

$$\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x$$

Ecuaciones exponenciales: La ecuación $2^{x-1} = 7$ representa una ecuación exponencial. Las propiedades de los logaritmos nos ayudan a resolver estas ecuaciones.

Ecuaciones Logarítmicas: Aquella ecuación en la que la incógnita aparece sometida a la operación de logaritmación.

La igualdad de los logaritmos de dos expresiones implica la igualdad de ambas. (principio en el que se fundamenta la resolución de ecuaciones logarítmicas, también se llama "tomar antilogaritmos")

$$\log_a u = \log_a v \Leftrightarrow u = v$$

Frecuentemente se resuelven aplicando las propiedades de los logaritmos antes enunciadas, en orden inverso, simplificando y realizando transformaciones oportunas.

EJERCICIOS DE ECUACIONES LOGARITMICAS

En los ejercicios 1 a 8, exprese el logaritmo en términos de los logaritmos de x, y y z, donde las variables representan números positivos.

1. (a) $\log_b(5xy)$ **(b)** $\log_b\left(\frac{y}{z}\right)$ **(c)** $\log_b\left(\frac{x}{yz}\right)$

2. (a) $\log_b(3xyz)$ **(b)** $\log_b\left(\frac{xy}{z}\right)$ **(c)** $\log_b(x^4y^2)$

3. (a) $\log_b(xy^5)$ **(b)** $\log_b \sqrt{xy}$

4. (a) $\log_b(z^{1/3})$ **(b)** $\log_b \sqrt[3]{yz^2}$

5. (a) $\log_b(x^{1/3}z^3)$ **(b)** $\log_b\left(\frac{xy^{1/2}}{z^4}\right)$

6. (a) $\log_b(x^2y^3z)$ **(b)** $\log_b\left(\frac{y^2}{x^5z^{1/4}}\right)$

7. (a) $\log_b \sqrt[3]{\frac{x^2}{yz^2}}$ **(b)** $\log_b(\sqrt[3]{x^2}\sqrt{yz})$

8. (a) $\log_b \sqrt[5]{\frac{x^3y^4}{z^2}}$ **(b)** $\log_b(\sqrt[4]{xy^3}\sqrt{z})$

En los ejercicios 25 a 32, encuentre el conjunto solución de la ecuación.

25. $\log_5(4x - 3) = 2$

26. $\log_2(2 - 3x) = -3$

27. $\log_{10} x + 3 \log_{10} 2 = 3$

28. $\log_{10} x + \log_{10}(x + 15) = 2$

29. $\log_3(x + 6) - \log_3(x - 2) = 2$

30. $\log_2(11 - x) = \log_2(x + 1) + 3$

31. $\log_2(x + 1) + \log_2(3x - 5) = \log_2(5x - 3) + 2$

32. $\log_3(2x - 1) - \log_3(5x + 2) = \log_3(x - 2) - 2$

Ecuación exponencial y logarítmica
Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones.

1. $10^{3x+1} = 0{,}0347$
2. $\log 5 + \log x = 2$
3. $e^{2x-1} + 68 = 207$
4. $\log_3(2x+1) = 1 + \log_3(x-2)$
5. $5^x = 4^{2x+1}$
6. $\log(6x+5) - \log 3 = \log 2 - \log x$
7. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2.5$
8. $(\ln x)^3 = \ln x^4$
9. $e^{e^x} = 2$
10. $x^{\log x} = 100x$

Resuelva los siguientes problemas

1. Si una población de bacterias comenzó con 100 y se duplica cada 3 horas, la cantidad de ejemplares luego de t horas es: $n = f(t) = 100(2^{\frac{t}{3}})$
a). Halla $f^{-1}(t)$
b). ¿Cuándo habrán 50 00 ejemplares?

2. Un cultivo tiene una cantidad inicial P_0 de bacterias. Pasada 1 hora, $t = 1$, la cantidad medida de bacterias es $\frac{3}{2}P_0$. Si la rapidez de crecimiento es proporcional a la cantidad de bacterias presentes $P(t) = P_0\, e^{kt}$ $(k > 0)$ en el momento t, calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de microorganismos.

3. El "crecimiento" de la población de una ciudad obedece la ley exponencial $P(t) = P_0\, e^{kt}$. Si disminuye de 900 000 a 800 000 entre 1993 y 1994, ¿cuál será la población en 1997?

4. Vida media del plutonio. Un reactor de reproducción convierte el uranio 238 en plutonio 239. Al cabo de 15 años, se tiene que se desintegrado 0.043 % de la cantidad inicial, A_0, de una muestra de plutonio. Calcule la vida media del plutonio si la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad restante e igual a: $A(t) = A_0\, e^{kt}$ $(k < 0)$

5. Cuando el flash se una cámara se apaga, las baterías vuelven a cargar el su capacitor inmediatamente y su ecuación de carga eléctrica está dada por $Q(t) = Q_0\left(1 - e^{-t/2}\right)$. (La máxima carga del capacitor es Q_0 y t es medido en segundos.)
   a) Encuentre el inverso de esta función.
   b) ¿Cuánto tiempo le toma al capacitor recargarse hasta el 90% de su capacidad máxima?

6. La población de cierta especie en un ambiente limitado, con población inicial de 100 individuos y que soporta una capacidad máxima de 1000 está dada por la ecuación: $P(t) = \frac{100000}{100 + 900e^{-t}}$, donde t se mide en años. Halle el tiempo requerido para que la población llegue a 900 individuos.